競争関係にある港湾の背後圏と輸送需要

黒　田　秀　彦
（運輸省港湾局開発課）

目　次

1．はじめに

港湾の計画・管理・運営にとって背後圏とその港湾の集荷量（総輸送需要）は最も基本的かつ重要な要素である。港湾の背後圏と総輸送需要は荷主が当該港湾を利用することによって得られる純利益が決定要因となる。したがって，個々の港の背後圏および総輸送需要は荷主の純利益を決定する要素である製品の市場価格・生産コスト・港湾費用・陸送費用・海送費用が変化すれば必然的に変化する。

本研究は港湾の管理・運営にあたり，海上輸送費・陸送費・貨物の市場価格の変化に如何に対応すればよいかという基本的命題に応えるため，港湾の背後圏と輸送需要を前述のような個々の決定因子を説明変数とする関数を導入し，競争関係にある港湾の均衡背後圏，均衡貨物量を求め，上記決定因子との関係を明らかにするものである。

このため，競争関係にある港の背後圏の分割についてはモーゼス（Moses, Leon N）によって導かれた市場圏分析理論（Market Area Analysis）を援用し、荷主がそれぞれの港を利用するときの等利潤点の軌跡で表わした。また，潜在背後圏は荷主（＝生産者）の限界利潤が最小平均可変費用に，即ち操業停止価格と等し

くなるような限界陸上輸送距離で定義した。したがって，港湾から一定の距離にある荷主の輸送需要は荷主（＝生産者）の利潤最大化条件から港湾費用・陸送費・海送費でなる運賃を変数とする需要関数として導き出した。次にそれぞれの港湾における総輸送需要は背後圏内の個々の荷主の輸送需要を積分することにより，レッシュ（Lösch, F. A）の定義する空間需要（Spatial Demand）として求めることにより，競争関係にある港湾の背後圏と輸送需要は，空間均衡値（Spatial Eq ilibrium ）として同時決定できることを示した。

本研究は上述のように空間経済理論（Spatial Economic Theory）を導入することにより，製品価格・港湾費用・陸送費・海送費が競争関係にある港湾の背後圏と集荷量におよぼす影響を分析可能とするものである。

2. 完全競争下の輸送需要

港湾から一定の距離にある生産者(荷主)の短期の輸送需要は港湾からの距離，運賃，港湾（または海上輸送部門）のサービス・レベルに依存する。個々の荷主の輸送需要をこのような要素で表現される需要関数として表わすことにより，互に競争関係にある港湾の背後圏がどのように分割されるか、輸送需要が背後圏内でどのような空間分布をするか，競争関係にある港間の背後圏及び輸送需要に均衡が成立するか等の基礎的課題の検討が可能となる。

本研究では港湾の輸送需要の構造そのものを分析することを主眼とせず，需要関数という媒体によって，競争関係にある港湾の背後圏及び輸送需要がそれぞれの港湾の立地点，サービス・レベルによってどのように変化するかを分析する。そのため，輸送需要関数を導くにあたり，Löschの空間需要分析（Spatial Demand Analysis）と同様に次のように単純化した諸仮定を設定する。

A 1．生産者（荷主と同一主体とみなす）は完全競争下で生産する。

A 2．生産者は所与の港湾料金，陸送，海送運賃の下で単一の，同質な生産物を生産し，それらを全て市場で売却する。

A 3．生産者の輸送行為は生産物を市場に出荷するためにのみ行われる。即ち全ての投入物は立地点で入手するものとする。

A 4．全ての貨物は港湾で船積みのため平均$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda}+T\omega\right)$の時間を要する

ものとする。

A 5．海上輸送費Taは一率，陸上輸送費（md）は距離(d)にのみ比例し，港湾費は$\frac{P_1}{2}(\frac{1}{\lambda}+T\omega)$は港湾内で費やされる時間$\frac{1}{2}(\frac{1}{\lambda}+T\omega)$にのみ比例するものとする。

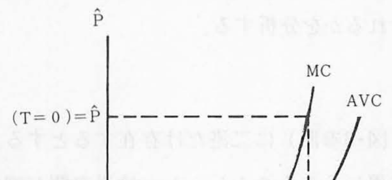
このとき生産者の利潤最大化条件は次のようになる。

(1)　$f'(Q)=P-Ta-m\cdot d-\frac{P_1}{2}(\frac{1}{\lambda}+T\omega)$

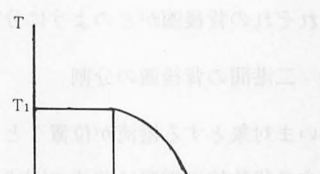
(2)　$f''(Q)>0$

式(1)および(2)は，生産者の限界費用f′(Q)が限界利潤〔$P\text{-}Ta\text{-}md-\frac{P_1}{2}(\frac{1}{\lambda}+T\omega)$〕に等しく，また限界費用曲線は増加関数であるという通常の利潤最大化条件を示している。

今，製品の市場価格P一定，輸送費$T=Ta+md+\frac{P_1}{2}(\frac{1}{\lambda}+T\omega)$可変とした場合、(1)式より運賃Tを変数とした輸送需要関数が導き出せる。このとき、もし限界費用曲線がU型であれば，輸送需要関数は通常の減少曲線であるが頭打ちした形となる。（図•1及び図•2参照）



図・1



図・2

このように輸送需要関数に頭打ちが生じるのは，もし限界利潤$\hat{P}=P-T$が生産者の最小平均可変費用（AVC）以下に，即ち操業停止価格$\hat{P}s$以下になるような価格に輸送費Tが上昇すれば，生産者が生産を中止するからである。ここで単純化の為，内陸輸送がトン・キロ当りの運賃一定の陸上輸送期間で港湾に向って

放射状に行われるという謂ゆる均一輸送空間の仮定を置くと上述の輸送需要関数は次のような性格を有していることがわかる。

b.1. もし製品の市場価格と運賃が一定であれば，港湾の改良による港湾内滞留時間の減少は港湾需要を増加させる。

b.2. もし企業の操業停止価格$\hat{P}s$がわかれば，非競争下での港湾の背後圏の境界（限界背後圏）は次式のd^*であることがわかる。

(3) $\hat{P}s = P - Ta - m \cdot d^* - \frac{P_1}{2}(\frac{1}{\lambda} + T\omega)$ または

(4) $d^* = \frac{1}{m}\left\{ P - \hat{P}s - Ta - \frac{P_1}{2}(\frac{1}{\lambda} + T\omega)\right\}$

3. 競争関係にある港湾の背後圏分割

次節で前述の各荷主の輸送需要関数をもとに競争状態および非競争状態にある港湾の空間需要（Spatial Demand）を求め，荷主・船社・港湾の間の空間均衡状態（Spatial Equilibrium）を分析する。

そのためここではまず競争状態にある港の間で港湾の位置と港湾費用との関係でそれぞれの背後圏がどのように分割されるかを分析する。

(1) 二港間の背後圏の分割

いま対象とする港湾が位置1と2（図・3参照）に二港だけ存在するとする。荷主の貨物輸送需要は前述の(1)式で表現しうるものとし，かつ輸送空間が謂ゆる均質輸送空間であり，各荷主は製品の輸送にあたり1または2を選択しうるものとする。

このとき荷主は港湾1または2を選択するにあたり利潤を最大化するように選択する。荷主の利潤最大化行動は次のように表わされる。

(5) $\max\pi = \left\{ P - Ta - m \cdot di - \frac{Pi}{2}(\frac{1}{\lambda i} + T\omega i)\right\} Qi - f(Qi) \qquad i=1 \text{ or } 2$

ここにi, Qiは生産地と港湾iとの距離, Qiは生産者が港湾iを使うときの生産量（＝出荷量）である。

このとき港湾1と港湾2の選択にあたって無差別な位置にある生産者は，どちらの港へ出荷してもその利潤πが等しくなる点に立地している。一方，港湾の選択行為と生産量の調整はそれぞれ無関係であるため，結局港湾の選択は次の

ように表現しうる。

(6) $\max_{i}\left\{P-Ta-m\cdot di-\frac{Pi}{2}(\frac{1}{\lambda i}+T\omega i)\right\}$

すなわち，生産者は単位生産量あたりの利潤を最大化する。

したがってどちらの港を選択しても等しい利潤が得られる位置にある生産者の立地点（すなわち等利潤点の軌跡）は次式により求まる。

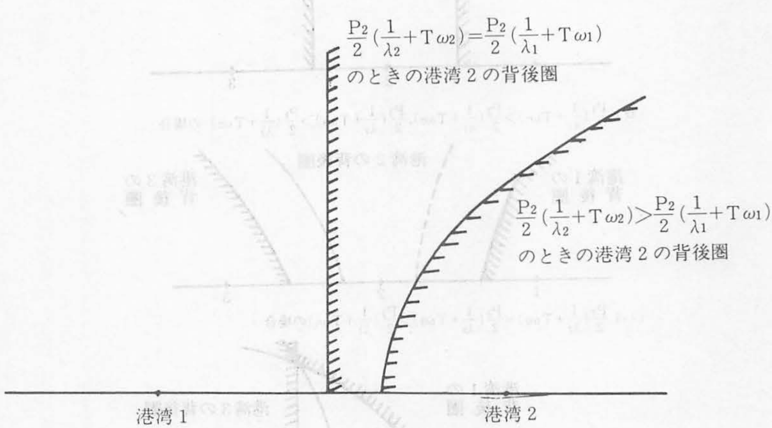
(7) $P-Ta-m\cdot d_2-\frac{P_2}{2}(\frac{1}{\lambda_2}+T\omega_2)=P-Ta-m\cdot d_1-\frac{P_1}{2}(\frac{1}{\lambda_1}+T\omega_1)$

または

(7)′ $d_1-d_2=\frac{1}{2m}\left\{P_2(\frac{1}{\lambda_2}+T\omega_2)-P_1(\frac{1}{\lambda_1}+T\omega_1)\right\}=k$ （一定）

上式より，競争関係にある港湾の背後圏は一種の双曲線または直線で分割されることがわかる。

すなわち，もし，港湾1と港湾2が全く同じサービスレベル〔単位貨物あたりの港湾費用×港湾内での所要時間$\frac{P}{2}(\frac{1}{\lambda}+T\omega)$に差が無いとき〕の場合は$d_1=d_2$すなわち2港間の中点を通る直線で二分し，港湾1と港湾2が同じサービスレベルにないとき$d_1-d_2=k(\neq 0)$の双曲線で分割され，サービスレベルの高い港湾がより広い背後圏を獲得する。（図・3参照）



図・3　二港間の背後圏分割

(2)　多港間の背後圏の分割

多港間の背後圏の分割についても基本的には二港間の分割を援用して分析が可能である。いま簡単のため，三港間の背後圏分割について検討する。海岸線

に並んだ港湾１，２，３の三港が等距離を隔てて存在しているとする。

港湾１および２，港湾１および３，並びに港湾２および３の背後圏の分割線は(7)′式と同様に次のように表される。

(8)　$d_1-d_2=\frac{1}{2m}\left\{P_2\left(\frac{1}{\lambda_2}+T\omega_2\right)-P_1\left(\frac{1}{\lambda_1}+T\omega_1\right)\right\}$

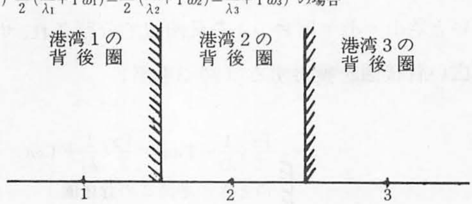
(9)　$d_1-d_3=\frac{1}{2m}\left\{P_3\left(\frac{1}{\lambda_3}+T\omega_3\right)-P_1\left(\frac{1}{\lambda_1}+T\omega_1\right)\right\}$

(10)　$d_2-d_3=\frac{1}{2m}\left\{P_3\left(\frac{1}{\lambda_3}+T\omega_3\right)-P_2\left(\frac{1}{\lambda_2}+T\omega_2\right)\right\}$

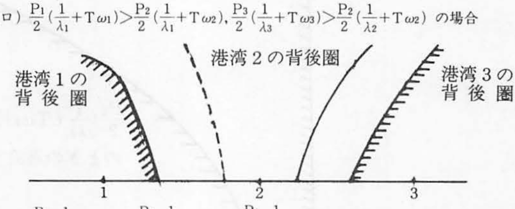
このときそれぞれの二港間は直線または一種の双曲線により分割される。そしてこのとき２本の背後圏分割線が交差するとき，必らず３本目の分割線もこの交点で交差する。

したがって，３港間の背後圏分割はそれぞれの港湾費の大小により次の４通りの分割が生じる。

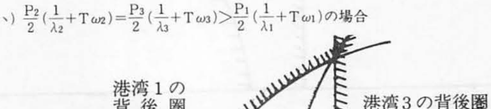
（イ）$\frac{P_1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1}+T\omega_1\right)=\frac{P_2}{2}\left(\frac{1}{\lambda_2}+T\omega_2\right)=\frac{P_3}{\lambda_3}+T\omega_3)$ の場合



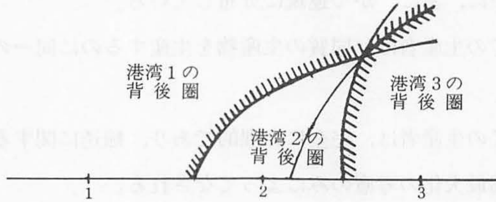
（ロ）$\frac{P_1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1}+T\omega_1\right)>\frac{P_2}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1}+T\omega_2\right),\ \frac{P_3}{2}\left(\frac{1}{\lambda_3}+T\omega_3\right)>\frac{P_2}{2}\left(\frac{1}{\lambda_2}+T\omega_2\right)$ の場合



（ハ）$\frac{P_2}{2}\left(\frac{1}{\lambda_2}+T\omega_2\right)=\frac{P_3}{2}\left(\frac{1}{\lambda_3}+T\omega_3\right)>\frac{P_1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1}+T\omega_1\right)$ の場合



（ニ） $\frac{P_3}{2}(\frac{1}{\lambda_3}+T\omega_3)>\frac{P_2}{2}(\frac{1}{\lambda_2}+T\omega_2)>\frac{P_1}{2}(\frac{1}{\lambda_1}+T\omega_1)$ の場合



4. 港湾貨物の空間需要

空間需要（Spatial Demand）というのはある特定の立地点で与えられた供給者がいるとき，地理的空間を有する市場に分布した個々の消費者の需要を積みあげたものを言い，レッシュによって定義されたものである。ここでは供給者にあたるのは第一節にも述べたように，海上輸送と港湾サービスを提供する，船社と港湾からなる海上輸送部門であり，個々の消費者にあたるのは均質な生産物を生産し，それらを全て港より出荷する生産者である。ここでは非競争状態および競争状態にある港湾の空間需要を求め，船社・荷主・港湾間の均衡条件を分析するための空間需要構造を分析する。

空間需要は2つの部分から成立っている。すなわち地理的に背後圏が全く重ならない非競争状態の空間需要と，それぞれが重なり合う競争状態の空間需要である。

空間需要をこのような二種の性格に分けて分析することにより港湾が競争している状態での空間均衡の一般的性質や均衡の存在および安定性の評価に不可欠な次のような条件が検討できる。すなわち，

(1)　2つの要素（競争的空間需要と非競争的空間需要）が存在するための条件。

(2)　空間需要関数およびその1次導函数の連続性。

(3)　空間需要関数の凹凸

単純化のためここでは1でなされたA1～A3および均質輸送空間の仮定に加え次の諸仮定を置く。

A４．生産者はその立地点が同一円周上では全く同一条件である均質空間に均一に，密に，かつ連続に分布している。

A５．全ての生産者は，同質の生産物を生産するのに同一の生産関数を有する。

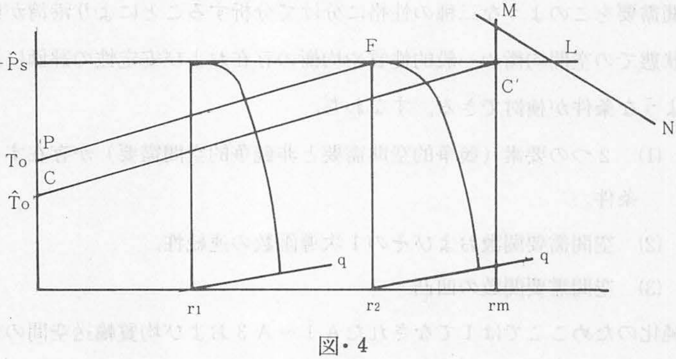
A６．全ての生産者は，完全に合理的であり，輸送に関する意志決定はその利潤最大化の考慮のみによってなされる。

(1) 非競争状態の空間需要

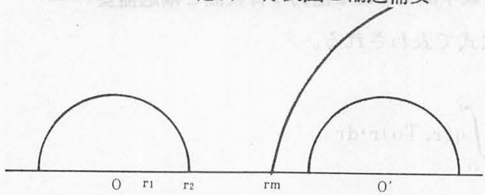
図·4において０は１つの港湾の位置を表わし，PFMは０点における海上運賃T_oに対応した，港湾から一定距離にある点での総輸送費を表わしている。MLNはこれと競争する位置にある港湾を利用するときの総輸送費である。0点にある港湾からr_mの地点ではそれぞれの港湾を利用する時の総輸送費用曲線がM点で交差し，したがって，この点ではどちらの港湾を利用しても総輸送費は等しい，すなわち等利潤点である。当然のことながらこのような状態は競争する港湾に向いた側だけで生ずる。

また前節で述べたように，r_mは焦点が０,０′にある双曲線上にある。港湾０から一定距離r_1，r_2の位置にある荷主の輸送需要関数はr_1，r_2点に示している。

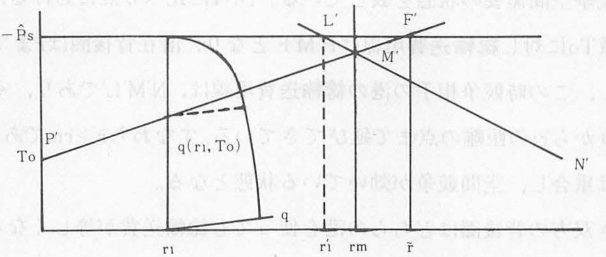
これらの個々の需要関数は１節で述べたように総輸送費$\tilde{T}_o = P - \hat{P}_s$（荷主が輸送にあたり支払うことができる最大支払対価）の点で頭打ちになっている。r_2の位置を越えた点に立地する生産者は海上輸送費T_oでは輸送を行わない。なぜならば彼の受け取る純価格Pは彼の操業停止価格$\hat{P}_s$より低いからである。



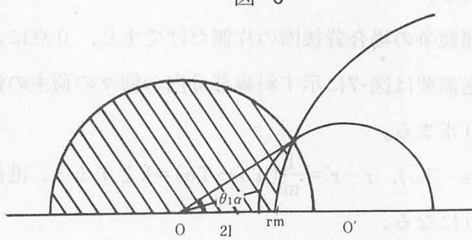
図・4



図・5



図・6



図・7

したがって地点0にある港湾の背後圏は海上運賃Toに対してはr_2までしか延びないことがわかる。この場合0点にある港の背後圏は他の港の背後圏と重合しない。

（$r_2 \leq rm$）したがって0点になる港は海上運賃Toに対しては競争状態にない。すなわち，このときの需要は非競争空間需要の1つである。非競争的背後圏の限界を$\tilde{r}$で表すと運賃Toに対しては$\tilde{r}=r_2$である。運賃Toのときの非競争的背後圏の限界を$\tilde{r}(To)$で表せば$\tilde{r}(To)=r_2$である。

このときの0点にある港湾の総需要は半径$\tilde{r}=r_2$までの個々の需要を足し上げれば求まる。$\tilde{r}$は(4)式におけるd^*と同じであり，いま$To=Ta+\frac{P}{2}(\frac{1}{\lambda}+T\omega)$であるので$q\cdot(r, To)$を(1)式におけるQについての解，すなわち，海上運賃Toのときの港湾0よりrの距離にある荷主の輸送需要とすれば，港湾0の非競争空

間需要$Q^f(To)$は次式で表わされる。

$$(8)\quad Q^f(To)=\pi\int_{o}^{\tilde{r}} q(r, To)r\cdot dr$$

(2)　競争状態の空間需要

図・6は競争空間需要の状態を表している。図・4に比べ0点における，より低い海上運賃Toに対し総輸送費用線はP′M′F′となり，潜在背後圏は$\tilde{r}$まで増大する。しかし，この時競争相手の港の総輸送費用線は，N′M′L′であり，その潜在背後圏は0から$\tilde{r}_1$の距離の点まで延びてきている。すなわち$\tilde{r}>rm$であるため潜在背後圏は重合し，空間競争が効いている状態となる。

このとき双方の背後圏はどちらの港を使っても総輸送費が等しくなる点M′でそれぞれカットされる。

この状態は2港間競争の場合背後圏の片側だけで生じ，0点における海上運賃Toに対する総輸送需要は図・7に示す斜線部分内の個々の荷主の輸送需要を足しあげることにより求まる。

今，$\tilde{r}=\dfrac{1}{m}(P-\hat{P}s-To)$，$r-r'=\dfrac{1}{m}(To'-To)=k$とすると，港湾0の総輸送需要は，次式のようになる。

$$(9)\quad Q^c(To \mid To')=\pi\int_{o}^{\tilde{r}} q(r, To)rdr-\int_{o}^{\theta_1}\int_{\frac{4l^2-k^2}{2(2l\,co\alpha-k)}}^{\tilde{r}} q(r, To)rdrd\alpha \qquad (但し, To\leqq To')$$

または

$$(10)\quad Q^c(To \mid To')=\pi\int_{o}^{\tilde{r}} q(r, To)rdr-\int_{o}^{\theta_1}\int_{\frac{4l^2-k^2}{2(2l\,co\alpha+k)}}^{\tilde{r}} q(r, To)rdrd\alpha \qquad (但し, To\geqq To')$$

ここに(9)式におけるQは$\tilde{r}=\dfrac{4l^2-k^2}{2(2l\,co\theta-k)}$の解であり，(10)式のQは$\tilde{r}=\dfrac{4l^2-k^2}{2(2l\cos\theta+k)}$の解である。

以上から港湾の空間需要に関して，レッシュの需要関数に類似な次の性格が導かれる。

(Prop.1) 相隣接する2港について，それぞれの港湾における海上輸送費（港湾費も含む）の間に$To+To'\geqq 2(P-\hat{P}s-ml)$の関係のときは空間需要は

全て非競争空間需要であり，$To+To' \leq 2(P-\hat{P}s-ml)$のときは競争空間需要である。（付記，Ⅲ－(1)）

（Prop.2）港湾の空間需要は隣接する港湾の海上運賃To'が$2 \cdot (P-\hat{P}s-ml)-To<0$であるとき，全て非競争空間需要である。（付記．b．参照）

（Prop.3）空間需要曲線は海上運賃Toの連続関数である。（付記．c．参照）

（Prop.4）空間需要曲線はなめらかな減少関数である。（付記．d．参照）

（Prop.5）(a)非競争的港湾の空間需要は競争的状態の港湾の空間需要より小さくない。そして，(b)非競争的港湾の空間需要関数の勾配の絶対値は競争的港湾の空間需要関数の勾配の絶対値よりも小さくない。（付記．e．参照）

5．まとめと展望

従来の港湾の計画においては，非弾力的需要の仮定の下で，港湾を利用する場合の総輸送費用を最小化するという手法がしばしばとられているが，現実には港湾の輸送需要は極めて価格弾力性の強い性格を有している。一方わが国の港湾制度では，港湾管理者に対し公企業体，すなわちノンプロフィット団体としての制度があらゆる制度の規範的考えとしてある。また，海上運賃についても外貿定期航路のように同盟一率運賃，船腹調整等国際的とり決めもある。このような状態が前述のような計画手法の非現実性とあいまって，最適港湾料金の設定や，運賃の設定の難しさの原因ともなっているし，また多くの港湾管理者が過大投資と過少料金による赤字団体となっている。カウツ（Kautz Erich A）が既に，船社・荷主・港湾の相互の影響が港湾の立地と最適規模に影響を与えることを指摘しているように，これら三者の影響を考慮した計画・管理方法を見出すことが必要である。

本論では，このような観点から，海上運賃を変数として，背後圏と港湾の需要を同時決定できる空間需要関数を導き出し，荷主の輸送需要を分析した。今後，海上運賃を決定する船社及び港湾の利潤関数を導出することにより，短期の均衡分析が可能となり，船社・港湾の独占・完全競争の影響が把握しうる。

これらについては，今回は紙数の制限もあり，言及できなかったが，次回に若

干の分析を行いたい。

付記. a .Prop.1の証明

図·4におけるcc′曲線をみると，これは距離rmにおける総輸送費が，$P\text{-}\hat{P}s=\tilde{T}o$ となるような海上輸送費 $\hat{T}o$ に対する総輸送費曲線である。すなわち，

(1)　$\hat{T}o+m\cdot rm=\tilde{T}o$　又は $\hat{T}o=\tilde{T}o-m\cdot rm$

ここに　$rm=\dfrac{4l^2-k^2}{2(2l-k)}=\dfrac{1}{2}(2l+k)=\dfrac{1}{2}\left\{2l+\dfrac{1}{m}(T'o-To)\right\}$

いま，他の海上輸送費Toを考えると距離rにおける総輸送費X(r, To)は次式で与えられる。

(2)　$X(r, To)=To+m\cdot r$

そしてこの総輸送費は $X(\tilde{r}, To)=\tilde{T}o$ で定義される距離 $\tilde{r}$ で最大輸送費 $\tilde{T}o(=P-Ps)$ に等しい。すなわち，

(3)　$m\tilde{r}=\tilde{T}o-To$

したがって，もし，$\tilde{T}o=To+m\tilde{r}\leq To+m\cdot rm$ であるならば，

$\leftrightarrow \tilde{T}=P-\hat{P}s\leq To+mrm$

$\leftrightarrow To\geq P-\hat{P}s-mrm=P-\hat{P}s-\dfrac{m}{2}\left\{2l+\dfrac{1}{m}(T'o-To)\right\}$

$\leftrightarrow To\geq 2(P-\hat{P}s-ml)-T'o$

このとき，$m\tilde{r}\leq mrm\leftrightarrow \tilde{r}\leq rm$ であり，一方限界背後圏 $R=\min\{\tilde{r}, rm\}$ であるから $R=\tilde{r}$ であり，これは競争の無い状態である。もし $\tilde{T}o=To+m\tilde{r}>To+mrm$ のときは丁度逆の状態であり，$\tilde{r}>rm$ であるので $R=rm$ となり，このときは競争的状態となる。

付記. b .Prop.2の証明

同質でない港湾が距離2lを距てて立地するとき，背後圏境界までの距離rm(To)はT′oが与えられたとき全てのToに対して $rm(To)=l+\dfrac{1}{2m}(T'o-To)$ である。

Prop.1.より空間需要は $To<2(P-\hat{P}s-ml)-T'o$ に対しては競争的空間需要となることがわかっている。一方Toは非負の制約がある。したがって，もし $2(P-\hat{P}s-m\cdot l)-T'o$ が負であるならば，$To<2(P-\hat{P}s-ml)-T'o$ を満たすTo，すなわち競争的状態となるための必要十分条件を満たすToは存在しない。したがっ

て$2(P-\hat{P}s-ml)-T'o<0$のときは全て非競争空間需要となる。

付記．c．Prop.3の証明

(8)式において，$\tilde{r}=\dfrac{1}{m}(P-\hat{P}s-To)$はToの連続関数であり，$q(r, To)$は定義によりToの連続関数であるため，この積分値はToの連続関数である。

(9)式において，Qは$\tilde{r}=(4l^2-k^2)/2(2l\cos\theta-k)$の解であり，$\tilde{r}$, kはToの連続関数であるため，２項目の積分値も連続関数である。

つぎに$Tc=2(P-\hat{P}s-ml)-T'o$とすると$To\rightarrow Tc^-$のとき，$\tilde{r}\rightarrow rm=(4l^2-k^2)/2(2l-k)$,したがって$To\rightarrow Tc^-$の場合$\cos\theta\rightarrow 1$（すなわち$Q\rightarrow 0$）である。このとき(9)式の２項目の積分値は$To\rightarrow Tc^-$のとき０になる。$To\rightarrow Tc^+$のときも(10)式から同様のことがいえる。このとき

$$\lim_{To\rightarrow Tc^-} Q^c(To\,|\,To')=\pi\int_0^{rm} q(r, Tc)rdr=Q^f(Tc)$$

$$\lim_{To\rightarrow Tc^+} Q^c(To\,|\,To')=\pi\int_0^{rm} q(r, Tc)rdr=Q^f(Tc)$$

したがって，Q(To)はTcで連続である。

付記．d．Prop.4の証明

(8)式より

$$\frac{dQ^f}{dTo}=\pi\int_0^{\tilde{r}(To)} qTo(r, To)rdr+q(\tilde{r}(To), To)\tilde{r}(To)\cdot\frac{d\tilde{r}}{dTo}$$

ここに，$\tilde{r}=\dfrac{1}{m}(P-\hat{P}s-To)$　　したがって$\dfrac{d\tilde{r}}{dTo}=-1<0$

定義により$q(\tilde{r}(To), To)=0$

$$\therefore\quad \frac{dQ^f}{dTo}=\pi\int_0^{\tilde{r}(To)} qTo(r, To)rdr$$

定義により　$qTo(r, To)<0$, $r>0$および$\tilde{r}(To)>0$

$$\therefore \frac{dQ^f}{dTo}<0$$

(9)式より

$$\frac{dQ^c}{dTo}=\pi\int_0^{\tilde{r}(To)} qTo(r,To)r\cdot dr-\int_0^{\theta_1}\int_{\frac{4l^2-k^2}{2(l\cos\alpha-k)}}^{\tilde{r}(To)} qTo(r,To)rdrd\alpha$$

$$+\int_0^{\theta_1} q\left(\frac{4l^2-k^2}{2(2l\cos\alpha-k)^2},To\right)\frac{d}{dTo}\left(\frac{4l^2-k^2}{2(2l\cos\alpha-k)}\right)d\alpha$$

一方,

$$\frac{d}{dTo}\left(\frac{4l^2-k^2}{2(2l\cos\alpha-k)}\right)=\frac{4l^2+k^2-4kl\cos\alpha}{2(2l\cos\alpha-k)^2}<\frac{4l^2+k^2-8kl+4kl}{2(2l\cos\alpha-k)^2}$$

$$=\frac{-(2l-k)^2-4kl}{2(2l\cos\alpha-k)^2}<0$$

定義により, $q\left(\frac{4l^2-k^2}{2(2l\cos\alpha-k)},To\right)>0\quad \theta>0$

したがって, 第3項の積分値<0, $qTo(r,To)<0$であるので

$$\pi\int_0^{\tilde{r}(To)} qTo(r,To)rdr<\int_0^{\theta}\int_{\frac{4l^2-k^2}{2(2l\cos\alpha-k)}}^{\tilde{r}(To)} qTo(r,To)rdrd\alpha$$

したがって, $\frac{dQ^c}{dTo}<0$,付記. c. と同様に$Q\to 0\ (To\to 2(P-\hat{P}s-ml)-To')$

このとき

$$\lim_{To\to T_c^+}\frac{dQ}{dTo}=\lim_{To\to T_c^+}\frac{dQ^f}{dTo}=\pi\int_0^{\tilde{r}(T_c^+)} qTo(r,T_c^+)rdr$$

$$\lim_{To\to T_c^-}\frac{dQ}{dTo}=\lim_{To\to T_c^-}\frac{dQ^c}{dTo}=\pi\int_0^{\tilde{r}(T_c^-)} q\ qTo(r,T_c^-)rdr$$

したがって $\lim_{To\to T_c^+}\frac{dQ}{dTo}=\lim_{To\to T_c^-}\frac{dQ}{dTo}$

付記. e. Prop. 5の証明

(9)式より, $q(r,To)\geq 0(0\leq r\leq\tilde{r}),\ \tilde{r}>\frac{4l^2-k^2}{2(2l\cos\alpha-k)},\ \theta\geq 0$であるので,

$$\int_0^{\theta}\int_{\frac{4l^2-k^2}{2(2l\cos\alpha-k)}}^{\tilde{r}} q(r,To)rdrd\alpha\geq 0$$

したがって

$$Q^c(T_o\mid T_o',\_\ \pi\int_0^{\tilde{r}}(r_1To)rdr=Q^f(To)$$